ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ

Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2024. Т. 30, № 1. С. 63–72. ISSN 2073-1426
Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics, 2024, vol. 30, № 1, pp. 63–72.
ISSN 2073-1426
Научная статья
УДК 378:51
EDN FWYDNK
https://doi.org/10.34216/2073-1426-2024-30-1-63-72

ВЫПОЛНЕНИЕ МНОГОЭТАПНОГО МАТЕМАТИКО-ИНФОРМАЦИОННОГО ЗАДАНИЯ «ОБРАМЛЕНИЯ МНОЖЕСТВА МАНДЕЛЬБРОТА СЕМЕЙСТВ ПОЛИНОМОВ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ И ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ»

Смирнова Елена Сафаровна, кандидат педагогических наук, Костромской государственный университет, Кострома, Российская Федерация, stakinaes@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0001-5834-6061.

Секованов Валерий Сергеевич, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, Костромской государственный университет, Кострома, Российская Федерация, sekovanovvs@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-8604-8931.

Рыбина Лариса Борисовна, кандидат философских наук, Костромская государственная сельскохозяйственная академия, Кострома, Российская Федерация, larisa.rybina.2014@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-7891-9373.

Щепин Роман Александрович, Костромской государственный университет, Кострома, Российская Федерация, kurlikchelovek@gmail.com, https://orcid.org/0009-0000-1175-7488.

Аннотация. В данной статье в рамках многоэтапного математико-информационного задания указана методика изучения студентами множеств Мандельброта и обрамлений множеств Мандельброта семейства полиномов третьей степени. Описаны алгоритмы построения данных множеств в различных средах. Изучаются связи обрамлений множества Мандельброта с замечательными кривыми: лемниската, эпициклоида и другими. Данная работа нацелена на развитие креативности и исследовательских компетенций студентов. При выполнении многоэтапного математико-информационного задания студент выступает в роли математика, программиста и компьютерного художника, что нацелено на развитие его креативности и повышения мотивации к математике и программированию.

Ключевые слова: креативность, творчество, многоэтапное математико-информационное задание, неподвижная точка, неподвижная притягивающая точка, неподвижная нейтральная точка, неподвижная отталкивающая точка, критическая точка, орбита точки, множество Мандельброта, обрамление множества Мандельброта, лемниската, эпициклоида, полином третьей степени.

Для цитирования: Секованов В.С., Смирнова Е.С., Рыбина Л.Б., Щепин Р.А. Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Обрамления множества Мандельброта семейств полиномов третьей степени и замечательные кривые» // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2024. Т. 30, № 1. С. 63–72. https://doi.org/10.34216/2073-1426-2024-30-1-63-72

Research Article

PERFORMING A MULTI-STAGE MATHEMATICAL INFORMATION TASK «FRAMING THE MANDELBROT SET OF FAMILIES OF POLYNOMIALS OF THE THIRD DEGREE AND REMARKABLE CURVES»

Elena Sa. Smirnova, Candidate of Pedagogical Sciences, Kostroma State University, Kostroma, Russian Federation, stakinaes@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0001-5834-6061.

Valery S. Sekovanov, Doctor of Pedagogical Sciences, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kostroma State University, Kostroma, Russian Federation, sekovanovvs@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-8604-8931.

Larisa B. Rybina, PhD, Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma, Russian Federation, larisa.rybina.2014@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-7891-9373.

Roman Al. Shchepin, Kostroma State University, Kostroma, Russian Federation, kurlikchelovek@gmail.com, https://orcid.org/0009-0000-1175-7488.

Abstract. In this article, within the framework of a multi-stage mathematical information task, the methodology for students to study Mandelbrot sets and frames of Mandelbrot sets of a family of polynomials of the third degree is indicated. Algorithms for constructing these sets in various environments are described. The connections of the frames of the Mandelbrot set with remarkable curves are studied: lemniscate, epicycloid and others. This work is aimed at developing students' creativity and research competencies. When performing a multi-stage mathematical and informational task, the student acts as a mathematician, programmer and computer artist, which is aimed at developing his creativity and increasing motivation for mathematics and programming.

Keywords: creativity, creativity, multi-stage mathematical information task, fixed point, fixed attracting point, fixed neutral point, fixed repulsive point, critical point, orbit of the point, Mandelbrot set, framing of the Mandelbrot set, lemniscate, epicycloid, polynomial of the third degree.

For citation: Sekovanov V. S., Smirnova E. S., Rybina L. B., Shchepin R. A. Performing a multi-stage mathematical information task «Framing the Mandelbrot set of families of polynomials of the third degree and remarkable curves». Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics, 2024, vol. 30, № 1, pp. 63–72. https://doi.org/10.34216/2073-1426-2024-30-1-63-72

Творчество является одним из важнейших разделов, изучаемых психологией и педагогикой. Однако творчество является одним из самых мало исследованных вопросов педагогики и психологии.

Настоящая статья посвящена развитию креативности студентов при выполнении математико-информационного задания (ММИЗ). Креативность, как способность к творчеству, напрямую связанна с творческим процессом и является одной из важнейших составляющих творческой личности, способной решать широкий спектр задач, которые ставит информационное общество. Это важное качество обеспечивает приспособление индивида к быстро меняющимся условиям жизни, является залогом успеха личности в профессиональной деятельности. Большую роль в развитии креативности играет выполнение обучающимися ММИЗ. Понятиям креативность и многоэтапное математико-информационное задание посвящены многочисленные работы, среди которых [1–28].

Мы считаем, что многоэтапные ММИЗ являются специально составленной последовательностью задач, упражнений, проблем и дидактических ситуаций, которые соединяют друг с другом: различные виды творческой математической деятельности; создание художественных композиций с помощью фракталов; проведение компьютерных экспериментов; проведение лабораторных работ по математике; поиск информации в Интернете.

Многоэтапные математико-информационные задания являются лабораторией формирования креативности для обучаемых. При их выполнении у студента развиваются интеллект, конвергентное и дивергентное мышление, вырабатывается умение прогнозировать результаты математической деятельности. Положительную роль для развития креативности обучающихся играет выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Обрамления множества Мандельброта семейств полиномов третьей степени и замечательные кривые». Данное ММИЗ состоит из четырех этапов. Для выполнения каждого из этапов от студентов требуется проявление его креативных качеств и упорной работы, результаты которой указывают на интеграцию математики и информатики и усиливают мотивацию к данным дисциплинам. Схема-план ММИЗ изображена на рисунке 1.

Следует отметить, что после выполнения каждого этапа студентам полезно предложить создание художественных композиций с использованием соответствующих множеств Мандельброта, которые являются красивыми математическими объектами.

Каждый полином третьей степени $P_c(z)$ имеет две критические точки $\breve{z}_1$, $\breve{z}_2$, поскольку его производной является полиномом второй степени. Будем считать, что данные критические точки не являются неподвижными. Пусть $D_{\breve{z}_1}$ – множество, состоящее из точек c комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$, для которых орбита точки $\breve{z}_1$ ограничена, а $D_{\breve{z}_2}$ – множество, состоящее из точек c комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$, для которых орбита точки $\breve{z}_2$ ограничена. Тогда под множеством Мандельброта данного полинома мы будем понимать множество M_c, равное $M_c = D_{\breve{z}_1} \cup D_{\breve{z}_2}$.

Определение: Под обрамлением множества Мандельброта M_c семейства полиномов $P_c(z)$ будем называть его подмножество, для каждой точки c из которого полином $P_c(z)$ имеет притягивающую неподвижную точку.

Этап 1. Рассмотрим семейство полиномов $P_1(z) = z^3 + cz$. Критическими точками является точки $\breve{z}_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{3}}$. Заметим, что

$$P_1(\breve{z}_1) = \breve{z}_1^{\,3} + c\breve{z}_1 = -\frac{c}{3}\sqrt{-\frac{c}{3}} + c\sqrt{-\frac{c}{3}} = \frac{2c}{3}\sqrt{-\frac{c}{3}},$$

$$P_1(\breve{z}_2) = \breve{z}_2^{\,3} + c\breve{z}_2 = -(1)\left(-\frac{c}{3}\right)\sqrt{-\frac{c}{3}} - \sqrt{-\frac{c}{3}}c = -\frac{2c}{3}\sqrt{-\frac{c}{3}}.$$

Следовательно, $\left|P_1(\breve{z}_1)\right| = \left|P_1(\breve{z}_2)\right|$.

Далее студентам следует предложить задачу: орбита критической точки $\breve{z}_1$ ограничена тогда и только тогда, когда ограничена орбита точки, $\breve{z}_2$ для полинома $P_1(z)$. Следовательно, в основном модуле программы (Модуль 1) построения множества Мандельбро-

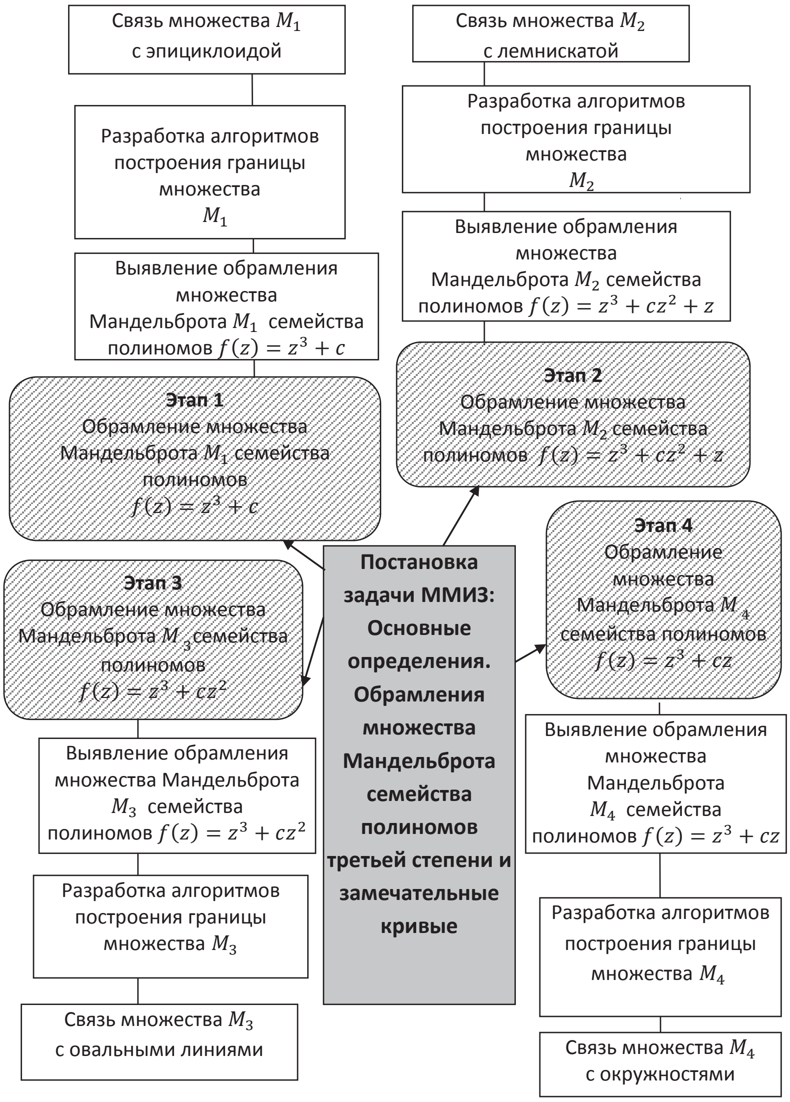

Рис 1. Схема-план ММИЗ «Обрамления множества Мандельброта семейств полиномов третьей степени и замечательные кривые»

та можно использовать любую из критических точек, например, $\breve{z}_1 = \sqrt{-\frac{c}{3}}$ (рис. 1а).

Модуль 1

for i: integer := 1 **to** width **do**
  for j: integer := 1 **to** height **do**
begin
  c := cplx((x_min + i * dx), (y_min + j * dy));
z := $\sqrt{-\frac{c}{3}}$; temp := z;
 try
  for k: integer := 1 **to** iterlim **do**
   z := f(z, c);
 if (distance(z, temp) < 2) **then** setpixel(i, j, clwhite)
  else setpixel(i, j, clblack);
 except
  setpixel(i, j, clblack);
 end;

Неподвижными точками полинома $P_1(z) = z^3 + cz$ являются точки $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{1-c}$, $z_3 = -\sqrt{1-c}$, а модуль производной полинома $P_1(z)$ в неподвижных точках будет равен $\left|P_1'(z_1)\right| = |c|$, $\left|P_1'(z_2)\right| = |2c-3|$, $\left|P_1'(z_3)\right| = |2c-3|$.

Пусть z_1, z_2, z_3 – притягивающие неподвижные точки. Тогда выполняются два условия:

1) $|c| < 1$;
2) $|2c - 3| < 1$.

Из условия 1 следует, что точки границы множества, для которого полином $P_1(z)$ имеет неподвижную притягивающую точку, удовлетворяют соотношению $|c| = 1$, задающему единичную окружность с центром в начале координат.

Из условия 2 вытекает, что точки c множества, для которого полином $P_1(z)$ имеет неподвижную притягивающую точку, удовлетворяют соотношению $|2c - 3| < 1$. Границей этого множества являет-

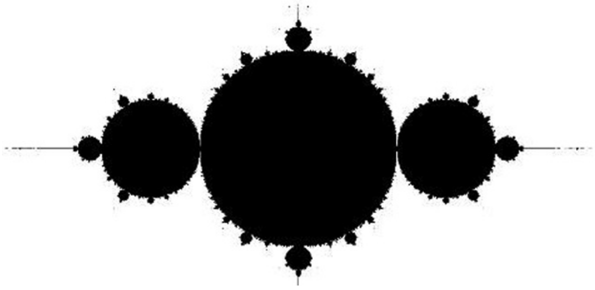

Рис. 1а. Множество Мандельброта семейства полиномов $P_1(z)=z^3+cz$

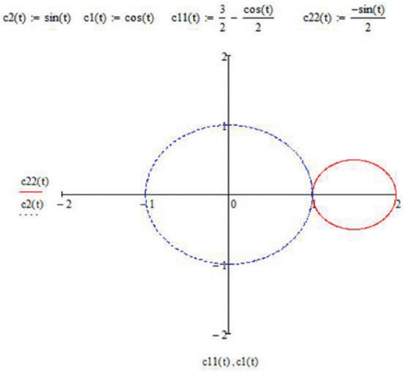

Рис. 1б. Обрамление множества Мандельброта семейства полиномов $P_1(z)=z^3+cz$

ся окружность с центром в точке (3/2,0) радиуса $\frac{1}{2}$.

Таким образом, границей множества неподвижных притягивающих точек являются две окружности: $|c| = 1$, $|2c - 3| = 1$ и притягивающие неподвижные точки лежат внутри данных окружностей и образуют обрамление множества Мандельброта функции $P_1(z)=z^3+cz$ (рис. 1б).

Заметим, что обрамление множества Мандельброта семейства полиномов $P_1(z)=z^3+cz$ построено в среде Маткад. Студентам полезно построить данное множество и с помощью языков программирования (например, Раскаль, С++ или Питон).

Этап 2. Рассмотрим семейство полиномов $P_2(z)=z^3+c$. Критическими точками полинома $P_2(z)$ являются точки $\breve{z}_{1,2}=0$. Таким образом, для построения множества Мандельброта семейства $P_2(z)$ в основном фрагменте программы, Модуля 1, рассмотренной в первом этапе вместо $z:=\sqrt{-\frac{c}{3}}$, следует написать z := 0 (рис. 2а).

Выявим теперь обрамление множества Мандельброта $P_2(z)$. Нетрудно заметить, что неподвижная притягивающая точка z удовлетворяет двум условиям:

1) $z^3+c=z$,

2) $\left|f'(z)\right|=3\left|z^2\right|$.

Из условия 2 следует, что точки границы удовлетворяют равенству $3\left|z^2\right|=1$. Откуда находим $|z|=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Следовательно, $z=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{it}$, а $c=z-z^3$.

Таким образом, мы получаем уравнение эпициклоиды: $c(t)=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{it}-\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{3it}$, $t\in[0,2\pi]$. То есть

$c(t)=\frac{1}{\sqrt{3}}(cost+i\,sint)-\frac{1}{3\sqrt{3}}(cos3t+i\,sin3t)$.

Положим $c(t)=c_1(t)+ic_2(t)$. Тогда параметрическое уравнение данной кривой будет иметь вид:

$$\begin{cases}\tilde{n}_1(t)=\frac{1}{\sqrt{3}}cost-\frac{1}{3\sqrt{3}}cos3t\\ \tilde{n}_2(t)=\frac{1}{\sqrt{3}}sint-\frac{1}{3\sqrt{3}}sin3t\end{cases}.$$

Используя компьютерную программу, построим эпициклоиду, для каждой внутренней точки c кото-

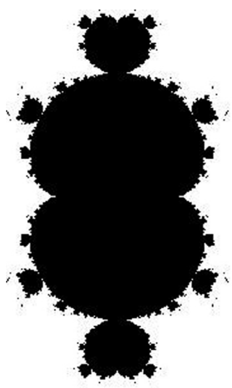

Рис. 2а. Множество Мандельброта семейства функций $P_2(z)=z^3+c$

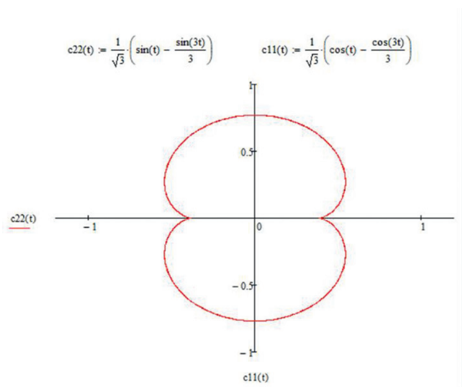

Рис. 2б. Обрамление множества Мандельброта семейства функций $P_2(z)=z^3+c$

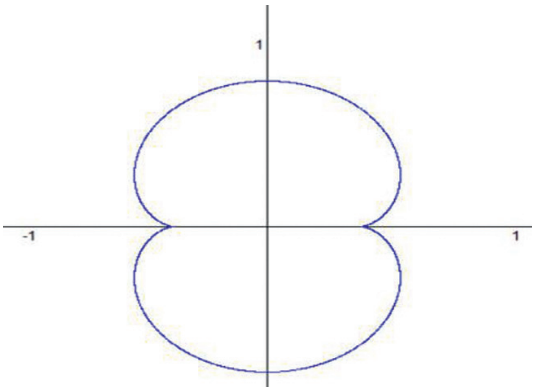

Рис. 2в. Обрамление множества Мандельброта семейства функций $P_3(z)=z^3+c$

рой функция $P_2(z)=z^3+c$ имеет неподвижную притягивающую точку (рис. 2б).

Здесь студентам полезно предложить задание: построить обрамление множества Мандельброта семейства полиномов $P_2(z)=z^3+c$, используя основной модуль паскаль-программы (модуль 2):

Модуль 2

```
var t := 0.0;
 while t < 2*pi do
 begin
re := 1/sqrt(3)*(cos(t) - cos(3 * t) / 3); im := 1/sqrt(3)*(sin(t) - sin(3 * t) / 3);
   DrawPoint(re, im, clBlue);    t := t + 0.001;
 end;
```

Этап 3. Рассмотрим семейство полиномов $P_3(z)=z^3+cz^2+z$. Для $P_3(z)$ критическими точками являются точки $\breve{z}_1=\frac{-2c+\sqrt{4c^2-12}}{6}$, $\breve{z}_2=\frac{-2c-\sqrt{4c^2-12}}{6}$.

Таким образом, для построения множества Мандельброта семейства $P_3(z)$ в основном фрагменте программы, Модуля 1, рассмотренной на первом этапе вместо z := 0, следует написать

z := (–2*c-sign(c.Real)*sqrt(4*c*c–12))/6 (рис. 3а).

Для неподвижной притягивающей точки полинома $P_3(z)=z^3+cz^2+z$ будем иметь:

1) $z^3+cz^2+z=z$,

2) $\left|P_3^{'}(z)\right|=3z^2+2cz+1$.

Неподвижными точками будут точки $z_{1,2}=0, z_3=-c$. Найдем значение модуля производной в ненулевой неподвижной точке z_3: $\left|P_3^{'}(z_3)\right|=\left|3c^2-2c^2+1\right|=\left|c^2+1\right|$.

Нетрудно заметить, что координаты неподвижной ненулевой притягивающей точки функции $P_3(z)=z^3+cz^2+z$ удовлетворяют неравенству $\left|c^2+1\right|<1$. Граничными точками этого множества будут точки, координаты которых удовлетворяют равенству $\left|1+c^2\right|=1$. Таким образом, мы получаем уравнение лемнискаты: $c(t)=\sqrt{e^{it}-1},\ t\in[0,2\pi]$.

То есть

$$c(t)=\sqrt{cost-1+isint}=$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{cost-1+\sqrt{2-2cost}}{2}}+\right.$$

$$\left.+i\frac{|sint|}{sint}\sqrt{\frac{1-cost+\sqrt{2-2cost}}{2}}\right).$$

Положим $c(t)=c_1(t)+ic_2(t)$. Тогда параметрическое уравнение лемнискаты будет иметь вид:

$$\begin{cases} c_1(t)=\pm\sqrt{\dfrac{cost-1+\sqrt{2-2cost}}{2}} \\ c_2(t)=\pm\sqrt{\dfrac{1-cost+\sqrt{2-2cost}}{2}} \end{cases}$$

Используя компьютерную программу, построим данную лемнискату 3.б, для каждой внутренней точки c которой функция $P_3(z)=z^3+cz^2+z$ будет иметь неподвижную притягивающую точку.

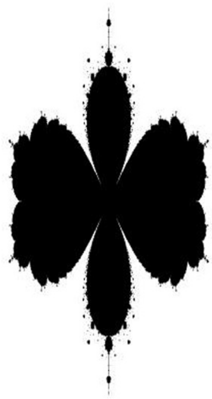

Рис. 3а. Множество Мандельброта семейства полиномов $P_3(z)=z^3+cz^2+z$

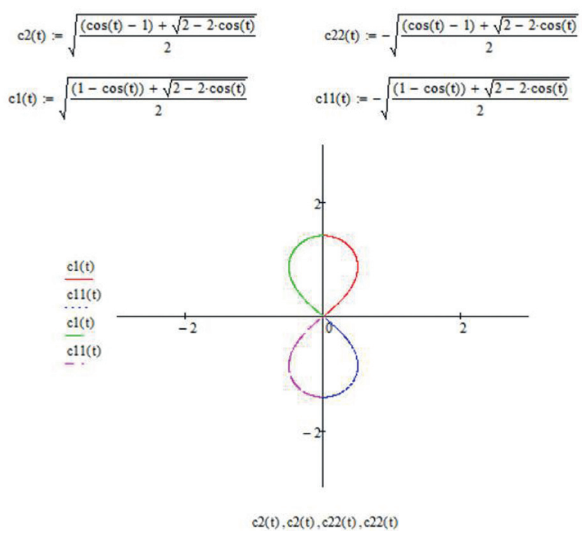

Рис. 3б. Обрамление множества Мандельброта семейства полиномов $P_3(z)=z^3+cz^2+z$

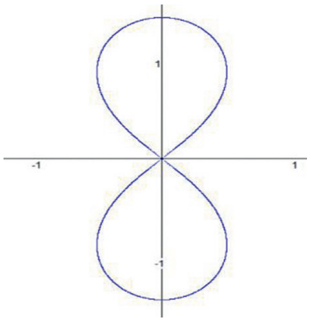

Рис. 3в. Обрамление множества Мандельброта семейства функций $P_3(z) = z^3 + cz^2 + z$

Используя основной модуль 3 паскаль-программы, построим лемнискату вторым способом (рис. 3в).

Модуль 3

```
while t < 2 * pi do
 begin
  tmp1 := cos(t);
  tmp2 := sqrt(2 - 2 * tmp1);
  re := sqrt(0.5 * (tmp1 - 1 + tmp2));im := sqrt(0.5 * (1 -
tmp1 + tmp2));
  DrawPoint(re, im, clBlue);DrawPoint(-re, -im, clBlue);
  DrawPoint(-re, im, clBlue);DrawPoint(re, -im, clBlue);
  t := t + 0.001;
 end;
```

Этап 4. Рассмотрим семейство полиномов $P_4(z) = z^3 + cz^2$. Для $P_4(z)$ критическими точками являются точки $\breve{z}_1 = 0$, $\breve{z}_2 = \frac{-2c}{3}$, а неподвижными точками будут точки $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{-c+\sqrt{c^2+4}}{2}$, $z_3 = \frac{-c-\sqrt{c^2+4}}{2}$.

Заметим, что в данном случае критическая точка $\breve{z}_1 = 0$ является и неподвижной. Таким образом, для построения множества Мандельброта семейства $P_4(z)$ в основном фрагменте программы, модуля 1, рассмотренной на первом этапе вместо $z := \sqrt{\frac{c}{3}}$, следует написать $z := -\frac{2c}{3}$ (рис. 4а).

Теперь будем искать обрамление множества Мандельброта полинома $P_4(z) = z^3 + cz^2$. Если z есть притягивающая неподвижная точка. Тогда выполняются два условия:

1) $z^3 + cz^2 = z$;

2) $P_4'(z) = 3z^3 + 2cz$.

Из условия 1 следует, что точка $z_1 = 0$ является неподвижной точкой и $z^2 + cz = 1$ для оставшихся двух неподвижных точек. Производная в неподвижной точке будет иметь вид: $f'(z) = 3z^2 + 2cz = 3z^2 + 2 - 2z^2 = 2 + z^2$. Кроме того, $f'(z) = 3 - 3cz + 2cz = 3 - cz$. Таким образом, если z_2 и z_3 неподвижные точки, то $f'(z_2) = 2 + z_2^2$, $f'(z_3) = 2 + z_3^2$ и $f'(z_2) = 3 - cz_2$, $f'(z_3) = 3 - cz_3$. Далее имеем: $c = \frac{1}{z} - z$ для каждой ненулевой неподвижной точки $P_4(z)$. Точки границы множества, имеющего неподвижную притягивающую точку, удовлетворяют соотношению $\left|2 + z^2\right| = 1$. То есть $2 + z^2 = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Из последней формулы находим уравнение кривой внутренние точки которой будут принадлежать обрамлению множества Мандельброта. Так как $z = \sqrt{e^{it} - 2}$, $t \in [0, 2\pi]$, то $c(t) = \frac{1}{\sqrt{e^{it}-2}} - \sqrt{e^{it}-2}$. Выведем параметрические уравнения данной кривой.

Используя формулу Эйлера и формулу извлечения корня из комплексного числа получим:

$$\sqrt{z} = \sqrt{e^{it} - 2} = \pm\left(\sqrt{\frac{cost - 2 + \sqrt{5 - 4cost}}{2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{|sin(t)|}{sin(t)} i \sqrt{\frac{2 - cost + \sqrt{5 - 4cost}}{2}}\right).$$

Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{cost - 2 + \sqrt{5 - 4cost}}{2}} +$$
$$+ \frac{|sin(t)|}{sin(t)} i \sqrt{\frac{2 - cost + \sqrt{5 - 4cost}}{2}}.$$

Далее имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{cost-2+\sqrt{5-4cost}}{2}} + \frac{|sin(t)|}{sin(t)} i \sqrt{\frac{2-cost+\sqrt{5-4cost}}{2}}} =$$
$$= \frac{\sqrt{\frac{cost-2+\sqrt{5-4cost}}{2}} - \frac{|sin(t)|}{sin(t)} i \sqrt{\frac{2-cost+\sqrt{5-4cost}}{2}}}{\frac{cost-2+\sqrt{5-4cost}}{2} + \frac{2-cost+\sqrt{5-4cost}}{2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{\frac{cost-2+\sqrt{5-4cost}}{2}} - \frac{|sin(t)|}{sin(t)} i \sqrt{\frac{2-cost+\sqrt{5-4cost}}{2}}}{\frac{cost-2+\sqrt{5-4cost}}{2} + \frac{2-cost+\sqrt{5-4cost}}{2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{\frac{cost-2+\sqrt{5-4cost}}{2}} - \frac{|sin(t)|}{sin(t)} i \sqrt{\frac{2-cost+\sqrt{5-4cost}}{2}}}{\frac{cost-2+\sqrt{5-4cost}}{2} + \frac{2-cost+\sqrt{5-4cost}}{2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{\frac{cost-2+\sqrt{5-4cost}}{2}} - \frac{|sin(t)|}{sin(t)} i \sqrt{\frac{2-cost+\sqrt{5-4cost}}{2}}}{\sqrt{5-4cost}} =$$
$$= \sqrt{\frac{cost-2+\sqrt{5-4cost}}{2(5-4cost)}} - \frac{|sin(t)|}{sin(t)} i \sqrt{\frac{2-cost+\sqrt{5-4cost}}{2(5-4cost)}}.$$

Таким образом,

$$c(t) = \pm\left(\sqrt{\frac{cost - 2 + \sqrt{5 - 4cost}}{2(5 - 4cost)}} - \right.$$

$$-\frac{\left|sin(t)\right|}{sin(t)}i\sqrt{\frac{2-cost+\sqrt{5-4cost}}{2(5-4cost)}}\Bigg)$$

Положим $c(t)=c_1(t)+c_2(t)$. Тогда будем иметь:

$$\begin{cases} c_1(t)=\pm\left(\sqrt{\dfrac{cost-2+\sqrt{5-4cost}}{2(5-4cost)}}-\right. \\ \left.-\sqrt{\dfrac{cost-2+\sqrt{5-4cost}}{2}}\right) \\ c_2(t)=\pm\left(-\dfrac{\left|sin(t)\right|}{sin(t)}\sqrt{\dfrac{2-cost+\sqrt{5-4cost}}{2(5-4cost)}}-\right. \\ \left.-\dfrac{\left|sin(t)\right|}{sin(t)}\sqrt{\dfrac{2-cost\sqrt{5-4cost}}{2}}\right) \end{cases}$$

Используя Маткад-программу, построим данную кривую, состоящую из двух овалов (рис. 4в).

Здесь полезно предложить студентам построить обрамление множества Мандельброта полинома $P_4(z)$ с помощи языков программирования.

Модуль 4 соответствующей паскаль-программы имеет вид:

Модуль 4

```
var t := 0.001;
 while t < 2 * pi do
 begin
  tmp1 := cos(t)-2+sqrt(5-4*cos(t));tmp2 := (10-8*cos(t));
   tmp3 :=2-cos(t)+sqrt(5-4*cos(t));
  re := sqrt(tmp1/tmp2)-sqrt(tmp1/2); im := -sqrt(tmp3/
tmp2)-sqrt(tmp3/2);
   DrawPoint(re, im, clBlue); DrawPoint(-re, -im,
clBlue);    DrawPoint(-re, im, clBlue); DrawPoint(re,
-im, clBlue);    t := t + 0.001;
end;
```

Обрамление множества Мандельброта семейства полиномов $P_4(z)$, построенное с помощью модуля 4, приведено на рисунке 4б.

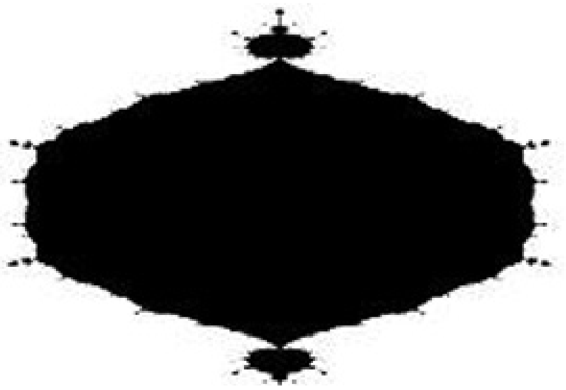

Рис. 4а. Множество Мандельброта семейства функций $f_2(z)=z^3+cz^2$

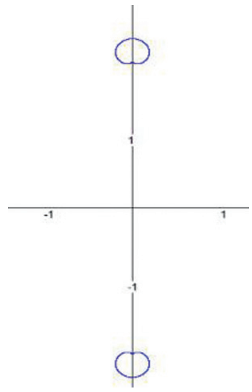

Рис. 4б. Обрамление множества Мандельброта семейства функций $f_2(z)=z^3+cz^2$

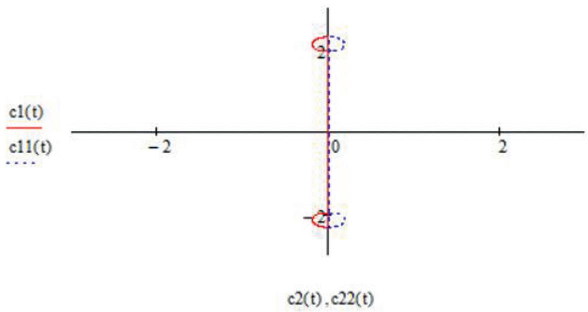

Рис. 4в. Обрамление множества Мандельброта семейства функций $f_2(z)=z^3+cz^2$

Эффективность использования ММИЗ была подтверждена в ходе проведения следующих педагогических наблюдений. В рамках дисциплин по изучению математического моделирования обучающиеся были поделены на две группы экспериментальную и контрольную. Обучающиеся контрольной группы ограничивались лишь изучением аналитических свойств семейства полиномов без построения изображения обрамления множества Мандельброта в каждом случае. Обучающиеся экспериментальной группы дополнительно разрабатывали компьютерный алгоритм и визуализировали множество на каждом этапе работы. В результате были выявлены следующие закономерности:

1. У обучающихся экспериментальной группы более основательно сформировано представление о рассматриваемых математических понятиях (установлено с помощью письменной теоретической проверочной работы).

2. Обучающиеся экспериментальной группы в ходе исследовательской работы меняли вид деятельности: действия математика-аналитика, разработчика компьютерных программ и компьютерного художника, что влияло на снижение усталости и лучшую концентрацию внимания (установлено с помощью методик Мюнстерберга).

3. У обучающихся экспериментальной группы был отмечен рост мотивации. Это объясняется тем, что в процессе деятельности студенты устанавливают соответствия между математическими формулами и красивыми видами построенных математических объектов, что подталкивает их к дальнейшим исследованиям (установлено с помощью диагностики направленности учебной мотивации Т. Д. Дубовицкой).

Таким образом, многоэтапные математико-информационные задания наиболее эффективны в процессе проведения сложных математических исследований, сопровождающихся разработкой программных решений и визуализацией итоговых достижений.

Список литературы

Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Москва: Постмаркет, 2000. 352 с.

Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций. Москва: «Просвещение», 1977. 320 с.

Милнор Дж. Голоморфная динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 320 с.

Пайген Х.О, Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем: Пер. с англ. Москва: Мир, 1993. 176 с.

Секованов В.С. О множествах Жюлиа рациональных функций // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. Кострома: КГУ, 2012. Т. 18, № 2. С. 23 – 28.

Секованов В.С. Элементы теории фрактальных множеств. Кострома: КГУ им. Н. А. Некрасова 2012. 208 с.

Секованов В.С., *Рыбина Л.Б.*, *Березкина А.Е.* О множествах Жюлиа функций, имеющих параболическую неподвижную точку // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин. Кострома: КГУ, 2018. С. 144–150.

Секованов В.С., *Смирнова А.О.* Развитие гибкости мышления студентов при изучении структуры неподвижных точек полиномов комплексной переменной // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. Кострома: КГУ, 2016. Т. 22, № 3. С. 189–192.

Секованов В.С. О некоторых дискретных нелинейных динамических системах. Фундаментальная и прикладная математика. Национальный Открытый университет *«ИНТУИТ»*. 2016. Т. 21, № 3. С. 133–150.

Секованов В.С. Что такое фрактальная геометрия? Москва: ЛЕНАНД, 2016. 260 с.

Секованов В.С. Элементы теории дискретных динамических систем. Учебное пособие. СПб.: Издательство «Лань». 2017. 180 с.

Секованов В.С., Рыбина Л.Б., Стрункина К.Ю. Изучение обрамлений множеств Мандельброта полиномов второй степени как средство развития оригинальности мышления студентов. Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2019. Т. 25, № 4, С. 193 – 199.

Секованов В.С., Салов А.Л., Самохов Е.А. Использование кластера при исследовании фрактальных множеств на комплексной плоскости. Актуальные проблемы преподавания информационных и естественнонаучных дисциплин. Материалы V Всероссийской научно-методической конференции. 2011. С. 85–103.

Секованов В.С. Фрактальная геометрия. Преподавание, задачи, алгоритмы, синергетика, эстетика, приложения: Учебное пособие. СПб.: Издательство «Лань», 2019. 180 с.

Секованов В.С. О множествах Жюлиа функций, имеющих неподвижные параболические точки. Фундаментальная и прикладная математика. 2021. Т. 23, № 4, С. 163–176.

Секованов В.С Гладкие множества Жюлиа. Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21, № 4, С. 133–150.

Секованов В.С., Рыбина Л.Б. Обрамления первого и второго порядков множеств Мандельброта и структура неподвижных точек полиномов второй степени, Фундаментальная. и прикладная математика, 2022, Т. 24, № 2, С. 197–212.

Секованов В.С Голоморфная динамика. Учебное пособие. СПб.: Издательство «Лань», 2021. 168 с.

Секованов В. С. Академик АН СССР А. Н. Колмогоров: Жизнь в науке и наука в жизни гения из Туношны. Москва, 2014. 704 с.

Секованов В.С., Миронкин Д.П. Изучение преобразования пекаря как средство формирования креативности студентов и школьников с использованием дистанционного обучения. Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. 2013. Т. 19, № 1, С. 190–195.

Секованов В.С. Элементы теории фрактальных множеств (3-е издание, переработанное и дополненное). Кострома: КГУ им. Н.А. Некрасова 2010. 260 с.

Секованов В.С Обучение фрактальной геометрии как средство формирования креативности студентов физико-математических специальностей университетов: дисс. … д. пед. наук. Кострома, 2007. 393 с.

Смирнова Е. С. Использование кейс-технологии на уроках математики и информатики с целью формирования метапредметных образовательных результатов обучающихся // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2019. № 2. С. 152–157.

Смирнова Е.С. Методические особенности введения понятия «фрактал» // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова.

Серия: Педагогика. Психология. Социальная работа. Ювенология. Социокинетика. 2016. № 4. С. 243–246.

Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. New York: John Wiley, 1990. 367 p.

Sekovanov V. S. On Some Discrete nonlinear dynamical systems // Jornal of Matematical Sciences (United States), 2019, Vol. 237, No. 3. pp. 460–472.

Execution of matemanics and information multister task «Buililding a fractal set with L-systems and information technoloqies» as a means of creative of students.

Sekovanov V., Ivkov V., Piguzov A., Fateev A. CEUR Workshop Proceedings Selected Papers of the 11 th International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education, SITITO 2016. 2016. pp. 204-211.

Sekovanov V.S. Smooth Yulia Sets // Jornal of Matematical Sciences (United States), 2020, Vol. 245, No. 2.

References

Kronover R.M. *Fraktaly i haos v dinamicheskih sistemah* [Fractals and chaos in dynamic systems]. Moscow: Postmarket, 2000. 352 p. (In Russ.)

Markushevich A.I., Markushevich L.A. *Vvedenie v teoriyu analiticheskih funkcij* [Introduction to the theory of analytical functions]. Moscow: "Enlightenment", 1977. 320 p. (In Russ.)

Milnor J. *Golomorfnaya dinamika* [Holomorphic dynamics]. Izhevsk: SIC "Regular and chaotic dynamics", 2000. 320 p. (In Russ.)

Paygen H., Richter P. Krasota fraktalov. Obrazy kompleksnyh dinamicheskih sistem [The beauty of fractals. Images of complex dynamic systems]. Moscow: Mir, 1993. 176 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S. O mnozhestvah Zhyulia racional'nyh funkcij [On Julia sets of rational functions]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N.A. Nekrasova* [Bulletin of the Kostroma State University named after N.A. Nekrasov], 2012, vol. 18, №. 2. pp. 23-28. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Elementy teorii fraktal'nyh mnozhestv* [Elements of the theory of fractal sets]. Kostroma: KSU, 2012. 208 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S., Rybina L.B., Berezkina A.E. *O mnozhestvah Zhyulia funkcij, imeyushchih parabolicheskuyu nepodvizhnuyu tochku* [On sets of Julia functions having a parabolic fixed point]. *Aktual'nye problemy prepodavaniya informacionnyh i estestvennonauchnyh disciplin* [Actual problems of teaching information and natural science disciplines]. Kostroma: KSU, 2018. pp. 144-150. (In Russ.)

Sekovanov V. S., Smirnova A. O. *Razvitie gibkosti myshleniya studentov pri izuchenii struktury nepodvizhnyh tochek polinomov kompleksnoj peremennoj* [Development of flexibility of students' thinking in studying the structure of fixed points of polynomials of a complex variable]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Pedagogika. Psihologiya. Sociokinetika* [Bulletin of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics], 2016, vol. 22, № 3, pp. 189-192. (In Russ.)

Sekovanov V. S. *O nekotoryh diskretnyh nelinejnyh dinamicheskih sistemah. Fundamental'naya i prikladnaya matematika* [On some discrete nonlinear dynamical systems]. *Fundamental'naja i prikladnaja matematika* [Fundamental and applied mathematics], 2016, Vol. 21 (3), pp. 133 – 150. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Chto takoe fraktal'naya geometriya?* [What is fractal geometry?]. Moscow: LENAND, 2016. 260 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Elementy teorii diskretnyh dinamicheskih sistem. Uchebnoe posobie* [Elements of the theory of discrete dynamical systems. Study guide]. St. Petersburg: Lan Publishing House. 2017. 180 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S., Rybina L.B., Strunkina K.Yu. *Izuchenie obramlenij mnozhestv Mandel'brota polinomov vtoroj stepeni kak sredstvo razvitiya original'nosti myshleniya studentov* [Studying the frames of Mandelbrot sets of polynomials of the second degree as a means of developing the originality of students' thinking]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Pedagogika. Psihologiya. Sociokinetika* [Bulletin of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics], 2019, Vol.25, № 4, pp. 193-199. (In Russ.)

Sekovanov V.S., Salov A.L., Samokhov E.A. *Ispol'zovanie klastera pri issledovanii fraktal'nyh mnozhestv na kompleksnoj ploskosti. Aktual'nye problemy prepodavaniya informacionnyh i estestvennonauchnyh disciplin* [The use of a cluster in the study of fractal sets on a complex plane. Actual problems of teaching information and natural science disciplines]. *Materialy V Vserossijskoj nauchno-metodicheskoj konferencii* [Materials of the V All-Russian Scientific and Methodological Conference], 2011. pp. 85-103. (In Russ.)

Sekovanov V. S. *Fractal geometry. Fraktal'naya geometriya. Prepodavanie, zadachi, algoritmy, sinergetika, estetika, prilozheniya: Uchebnoe posobie* [Teaching, tasks, algorithms, synergetics, aesthetics, applications: textbook]. St. Petersburg: Publishing house "Lan", 2019. 180 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *O mnozhestvah Zhyulia funkcij, imeyushchih nepodvizhnye parabolicheskie tochki. Fundamental'naya i prikladnaya matematika* [On sets of Julia functions having fixed parabolic points. Fundamental and applied mathematics]. 2021. Vol. 23, № 4, pp. 163-176. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Gladkie mnozhestva Zhyulia. Fundamental'naya i prikladnaya matematika* [Smooth Julia sets. Fundamental and applied mathematics], 2016, Vol. 21 (4), pp. 133-150. (In Russ.)

Sekovanov V.S., Rybina L.B. *Obramleniya pervogo i vtorogo poryadkov mnozhestv Mandel'brota i struktura nepodvizhnyh tochek polinomov vtoroj stepeni, Fundamental'naya. i prikladnaya matematika* [Frames of the first and second orders of Mandelbrot sets and the structure of fixed points of polynomials of the second degree, Foundation. and approx. math], 2022, Vol.24 (2), pp. 197-212. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Golomorfnaya dinamika. Uchebnoe posobie* [Holomorphic dynamics. Study guide]. St. Petersburg: Lan Publishing House. 2021. 168 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Akademik AN SSSR A.N. Kolmogorov: Zhizn' v nauke i nauka v zhizni geniya iz Tunoshny* [Academician of the USSR Academy of Sciences A.N. Kolmogorov: Life in science and science in the life of a genius from Tunoshna]. Moscow, 2014. 704 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S., Mironkin D.P. *Izuchenie preobrazovaniya pekarya kak sredstvo formirovaniya kreativnosti studentov i shkol'nikov s ispol'zovaniem distancionnogo obucheniya* [The study of the baker's transformation as a means of forming the creativity of students and schoolchildren using distance learning]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N.A. Nekrasova* [Bulletin of the Kostroma State University named after N.A. Nekrasov], 2013, Vol.19, №. 1, pp. 190-195. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Elementy teorii fraktal'nyh mnozhestv (3-e izdanie, pererabotannoe i dopolnennoe)* [Elements of the theory of fractal sets (3rd edition, revised and supplemented)]. Kostroma: KSU, 2010. 260 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Obuchenie fraktal'noj geometrii kak sredstvo formirovaniya kreativnosti studentov fiziko-matematicheskih special'nostej universitetov. Dissertaciya na soiskanie uchenoj stepeni doktora pedagogicheskih nauk* [Teaching fractal geometry as a means of forming the creativity of students of physics and mathematics specialties of universities. Dissertation for the degree of Doctor of Pedagogical Sciences]. Kostroma, 2007. (In Russ.)

Smirnova E. S. *Ispol'zovanie kejs-tekhnologii na urokah matematiki i informatiki s cel'yu formirovaniya metapredmetnyh obrazovatel'nyh rezul'tatov obuchayushchihsya* [The use of case technology in mathematics and computer science lessons in order to form meta-subject educational results of students]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Pedagogika. Psihologiya. Sociokinetika* [Bulletin of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics], 2019, vol. 2, pp. 152-157. (In Russ.)

Smirnova E. S. *Metodicheskie osobennosti vvedeniya ponyatiya «fraktal»* [Methodological features of the introduction of the concept of "fractal]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Pedagogika. Psihologiya. Sociokinetika* [Bulletin of the Kostroma State University named after N.A. Nekrasov. Series: Pedagogy. Psychology. Social work. Juvenile studies. Sociokinetics], 2016, № 4, pp. 243–246. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 01.02.2024; одобрена после рецензирования 29.02.2024; принята к публикации 18.03.2024.

The article was submitted 01.02.2024; approved after reviewing 29.02.2024; accepted for publication 18.03.2024.